

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Takmičenje iz MATEMATIKE
za III razred srednje škole

1. Dokazati da jednačina

$$x^{2017} + y^{2017} = 2017^{2017}$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje: Pretpostavimo da data jednačina ima rješenje u skupu prirodnih brojeva. Tada imamo da je $x < 2017$ i $y < 2017$. Bez umanjavanja opštosti pretpostavimo da je $y \geq x$. Tada važi

$$x^{2017} = 2017^{2017} - y^{2017} = (2017 - y)(2017^{2016} + 2017^{2015}y + \dots + y^{2016}) > 1 \cdot 2017 \cdot y^{2016} > x^{2017},$$

što je kontradikcija. □

2. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokazati da važe nejednakosti

$$\frac{9}{4} \leq \frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} < 4.$$

Rješenje: Zanimajući nenegativne članove a^4 , b^4 i c^4 i množeći odgovarajuće izraze sa $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ i $c^2 + 1$ respektivno, dobijamo sljedeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \\ & \leq \frac{1}{a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{c^4 - c^2 + 1} \\ & = \frac{a^2 + 1}{a^6 + 1} + \frac{b^2 + 1}{b^6 + 1} + \frac{c^2 + 1}{c^6 + 1} \\ & < a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Alternativno, do gornjeg ograničenja možemo da dodjemo koristeći kvadratnu funkciju $f(t) = 2t^2 - t + 1, t \in [0, 1]$. Tjeme odgovarajuće parabole (grafika funkcije) je $(1/4, 7/8)$ tj. $f_{\min} = f(1/4) = 7/8$. Tada

$$\frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \leq \frac{3}{f(1/4)} = \frac{24}{7} < 4.$$

Donja ocjena se dobija direktnom primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine,

$$\frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \geq \frac{9}{2(a^4 + b^4 + c^4) + 2} \geq \frac{9}{4}.$$

U posljednjoj nejednakosti koristili smo činjenicu da je $a^4 + b^4 + c^4 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$. \square

3. Koliko ima funkcija $f : \{1, 2, 3, \dots, 2013\} \rightarrow \{2014, 2015, 2016, 2017\}$ kod kojih je

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2013)$$

neparan broj?

Rješenje: Prvih 2012 brojeva možemo preslikati na 4^{2012} načina, pa ako je $f(1) + f(2) + \dots + f(2012)$ paran broj, onda za $f(2013)$ dolaze u obzir dvije vrijednosti 2015 ili 2017, a ako je $f(1) + f(2) + \dots + f(2012)$ neparan broj, onda $f(2013)$ može biti 2014 ili 2016, pa je broj takvih funkcija jednak

$$2 \cdot 4^{2012} = 2^{4025}.$$

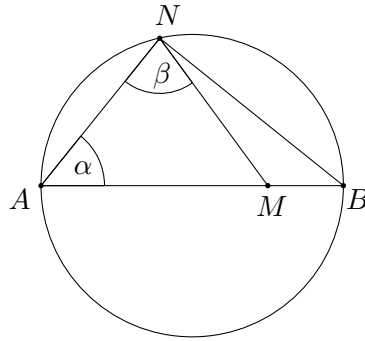
\square

4. Neka se A, B, M tri kolinearne tačke pri čemu je tačka M između tačaka A i B . Neka je tačka N na krugu čiji je prečnik duž AB . Pokazati da količnik

$$\frac{\operatorname{tg} \angle BAN}{\operatorname{tg} \angle ANM}$$

ne zavisi od izbora tačke N sa ovog kruga.

Rješenje: Neka je $\angle BAN = \alpha$ i $\angle ANM = \beta$, tada je $\angle ABN = 90^\circ - \alpha$ i $\angle MNB = 90^\circ - \beta$.



Slika 1.

Dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \angle MNB}{\sin \angle ABN}. \quad (1)$$

Iz sinusne teoreme imamo da je

$$P_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AN \cdot NM \cdot \sin \beta,$$

što daje

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{NM}{AM}.$$

Na isti način dokazuje se da je

$$\frac{\sin \angle MNB}{\sin \angle ABN} = \frac{BM}{NM}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobija se da je

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\angle MNB}{\angle ABN} = \frac{AM}{BM},$$

što dokazuje da izraz $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ ne zavisi on izbora tačke N . □