

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Takmičenje iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. Dokazati da za svaki prirodan broj n važi

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{3n+1} \leq 4^n.$$

Rješenje: Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom po n . Za $n = 1$ dobijamo

$$\binom{2}{1} \sqrt{3+1} = 4.$$

Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n = k$ i dokažimo da važi za $n = k + 1$.

Dobijamo

$$\begin{aligned} \binom{2k+2}{k+1} \cdot \sqrt{3k+4} &= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)^2(k!)^2} \cdot \sqrt{3k+4} \\ &= \binom{2k}{k} \cdot \sqrt{3k+1} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \sqrt{\frac{3k+4}{3k+1}} \\ &\leq 4^k \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \sqrt{\frac{3k+4}{3k+1}}, \end{aligned}$$

pri čemu posljednji korak slijedi iz induktivne pretpostavke. Preostaje dokazati da je

$$\frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot \sqrt{\frac{3k+4}{3k+1}} \leq 4,$$

što je ekvivalentno sa

$$12k^3 + 28k^2 + 19k + 4 \leq 12k^3 + 28k^2 + 20k + 4.$$

Dakle,

$$\binom{2k+2}{k+1} \cdot \sqrt{3k+4} \leq 4^{k+1},$$

odnosno data nejednakost važi sa svaki prorodan broj n . □

2. Koliko ima funkcija $f : \{1, 2, 3, \dots, 2013\} \rightarrow \{2014, 2015, 2016, 2017\}$ kod kojih je

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2013)$$

neparan broj?

Rješenje: Prvih 2012 brojeva možemo preslikati na 4^{2012} načina, pa ako je $f(1) + f(2) + \dots + f(2012)$ paran broj, onda za $f(2013)$ dolaze u obzir dvije vrijednosti 2015 ili 2017, a ako je $f(1) + f(2) + \dots + f(2012)$ neparan broj, onda $f(2013)$ može biti 2014 ili 2016, pa je broj takvih funkcija jednak

$$2 \cdot 4^{2012} = 2^{4025}.$$

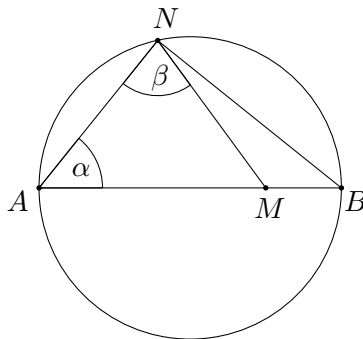
□

3. Neka se A, B, M tri kolinearne tačke pri čemu je tačka M između tačaka A i B . Neka je tačka N na krugu čiji je prečnik duž AB . Pokazati da količnik

$$\frac{\operatorname{tg} \angle BAN}{\operatorname{tg} \angle ANM}$$

ne zavisi od izbora tačke N sa ovog kruga.

Rješenje: Neka je $\angle BAN = \alpha$ i $\angle ANM = \beta$, tada je $\angle ABN = 90^\circ - \alpha$ i $\angle MNB = 90^\circ - \beta$.



Slika 1.

Dobijamo

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \angle MNB}{\sin \angle ABN}. \quad (1)$$

Iz sinusne teoreme imamo da je

$$P_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AN \cdot NM \cdot \sin \beta,$$

što daje

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{NM}{AM}.$$

Na isti način dokazuje se da je

$$\frac{\sin \angle MNB}{\sin \angle ABN} = \frac{BM}{NM}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobija se da je

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\angle MNB}{\angle ABN} = \frac{AM}{BM},$$

što dokazuje da izraz $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ ne zavisi on izbora tačke N . □

4. Neka je $P(z)$ polinom i w kompleksan broj takav da je $w = \cos(\frac{2\pi}{k}) + i \sin(\frac{2\pi}{k})$ za neki prirodan broj k . Dokazati da je

(a) $w^k = 1$;

(b) $\frac{P(1) + P(w) + \dots + P(w^{k-1})}{k} = P(0)$.

Rješenje: (a) Označimo sa $\phi = \frac{2\pi}{k}$. Na početku dokažimo indukcijom po $m, 1 \leq m \leq k$, da ako je ω kompleksan broj oblika $\omega = \cos \phi + i \sin \phi$, onda je $\omega^m = \cos m\phi + i \sin m\phi$. Naime, za slučaj $m = 2$ direktnom provjerom imamo

$$\omega^2 = \cos^2 \phi - \sin^2 \phi + 2i \sin \phi \cos \phi = \cos 2\phi + i \sin 2\phi.$$

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za prirodan broj $m, 2 \leq m \leq k-1$, tada

$$\begin{aligned} \omega^{m+1} &= \omega^m \cdot \omega = (\cos(m\phi) + i \sin(m\phi))(\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= \cos(m\phi) \cos \phi - \sin(m\phi) \sin \phi + i(\sin(m\phi) \cos \phi + \sin \phi \cos m\phi) \\ &= \cos(m+1)\phi + i \sin(m+1)\phi. \end{aligned}$$

Dakle, tvrđenje važi za svako $m, 1 \leq m \leq k$, što povlači $w^k = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$.

(b) Neka je $P(z) = \sum_{m=0}^n a_m z^m$. Tada na osnovu dijela pod (a) imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k-1} P(w^k) &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (a_0 + a_1 w + \dots + a_n w^n) + \dots \\ &\quad + (a_0 + a_1 w^{k-1} + \dots + a_n w^{n(k-1)}) \\ &= k a_0 + a_1 \frac{w^k - 1}{w - 1} + a_2 \frac{w^{2k} - 1}{w^2 - 1} + \dots + a_n \frac{w^{nk} - 1}{w^{k-1} - 1} \\ &= k P(0). \end{aligned}$$

□