

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Dat je skup brojeva $\{2014, 2015, 2016\}$. Pod *operacijom* se podrazumijeva povećanje neka dva broja iz tog skupa za 3 ili smanjenje jednog od tih brojeva za 6. Da li je moguće da se nakon izvjesnog broja *operacija* dobije skup $\{2015, 2016, 2017\}$? Odgovor detaljno obrazložiti.

Rješenje: Povećanjem neka dva broja za 3 ili smanjenjem jednog od brojeva za 6 zbir brojeva skupa se poveća ili smanji za 6, pa će zbir brojeva svakog skupa dobijenog primjenom "operacije" dati isti ostatak pri dijeljenju sa 6. Kako zbirovi $2014 + 2015 + 2016 = 6045$ i $2015 + 2016 + 2017 = 6048$ daju različite ostatke pri dijeljenju sa 6, to se ne može dobiti skup $\{2015, 2016, 2017\}$. \square

2. Odrediti prirodne brojeve n takve da je proizvod svih djelilaca broja n jednak 5832.

Rješenje: Ako je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ faktorizacija prirodnog broja n , za neke proste brojeve p_1, p_2, \dots, p_k i neke prirodne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, onda je broj svih djelilaca broja n jednak

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Označimo sa $Q(n)$ proizvod svih djelilaca broja n . Ako su $d_1, d_2, \dots, d_{\tau(n)}$ svi djeloci broja n onda su i $n/d_1, n/d_2, \dots, n/d_{\tau(n)}$ djeloci broja n pa važi

$$Q(n) = d_1 d_2 \dots d_{\tau(n)} = \frac{n^{\tau(n)}}{Q(n)},$$

odnosno dobijamo

$$Q(n) = \sqrt{n^{\tau(n)}}.$$

Kako je $5832 = 2^3 \cdot 3^6$, to je $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ za neke prirodne α i β . Odredimo α i β koristeći uslov zadatka, odnosno

$$(2^\alpha 3^\beta)^{(\alpha+1)(\beta+1)} = 2^6 \cdot 3^{12}.$$

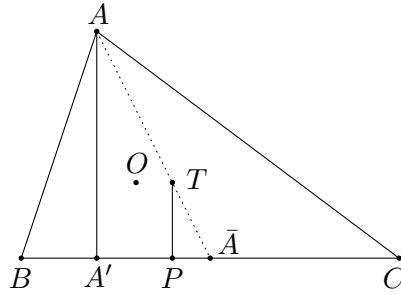
Slijedi

$$\alpha(\alpha+1)(\beta+1) = 6 \text{ i } \beta(\alpha+1)(\beta+1) = 12,$$

odnosno $\beta = 2\alpha$, pa je $\alpha = 1$ i $\beta = 2$. Dakle, $n = 2 \cdot 3^2 = 18$. \square

3. U trouglu ABC su sve stranice različitih dužina i zbir dužina dvije stranice jednak je dvostrukoj dužini treće stranice. Dokazati da je prava koja prolazi kroz centar upisane kružnice i težište tog trougla paralelna stranici koja je srednja po dužini.

Rješenje: Označimo sa T težište trougla, a sa O centar upisane kružnice. Neka su a, b, c dužine stranica trougla i neka je a stranica koja je srednja po dužini. Iz uslova zadatka je $b + c = 2a$.



Neka je A' podnožje visine iz tjemena A , \bar{A} sredina stranice dužine a , i P podnožje normale iz težišta T na stranicu dužine a . Trouglovi $\triangle AA'\bar{A}$ i $\triangle TP\bar{A}$ su slični, pa slijedi da je

$$TP : AA' = T\bar{A} : A\bar{A} \Rightarrow TP = \frac{1}{3}h,$$

jer je $T\bar{A} : A\bar{A} = \frac{1}{3}$. S druge strane imamo:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} = r \cdot s,$$

gdje je s poluobim trougla, a r poluprečnik upisane kružnice. Kako je $s = \frac{3}{2}a$, to dobijamo

$$h = 3r.$$

Dakle, $TP = \frac{1}{3}h = r$, što daje da je prava određena tačkama T i O paralelna sa srednjom po dužini, stranicom trougla. \square

4. Neka su x, y, z, w pozitivni realni brojevi takvi da važi $xyz + yzw + zwx + wxy = 4$. Dokazati da je

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 4.$$

Rješenje: Koristeći uslov zadatka, nejednakost između geometrijske i kvadratne sredine, nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine i nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, dobijamo

$$\begin{aligned} 4 = xy(z + w) + zw(x + y) &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} \sqrt{2(z^2 + w^2)} + \frac{z^2 + w^2}{2} \sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)} \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{z^2 + w^2}{2}} \right) \\ &\leq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}, \end{aligned}$$

odnosno važi tražena nejednakost. \square