

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2017

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Neka je

$$f(n) = \begin{cases} \log_8 n, & \text{ako je } \log_8 n \text{ racionalan broj,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017)$.

Rješenje: Najprije odredimo n za koje je $\log_8 n$ racionalan. Kako je $\log_8 n = \frac{1}{3} \log_2 n$, to za neki nenegativni cijeli broj p i neki $q \in \mathbb{N}$ treba da je $\log_2 n = \frac{p}{q}$. Slijedi

$$2^p = n^q,$$

pa je n stepen dvojke. Pretpostavimo da n nije stepen dvojke. Tada se n može zapisati kao $n = r \cdot 2^k$ za neki neparan broj $r > 1$ i $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Slijedi,

$$2^p = r^q \cdot 2^{kq},$$

pa za $kq > p$ dobijamo da r^q nije prirodan broj, dok za $kq \leq p$ broj p važi $p = kq + k'$ za neko $k' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Slijedi da je $2^{k'} = r^q$, a to nije moguće, ako je $r > 1$. Dakle, $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Slijedi

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) &= \frac{1}{3} (\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 2^2 + \dots + \log_2 2^{10}) \\ &= \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 10}{3} = \frac{55}{3}. \end{aligned}$$

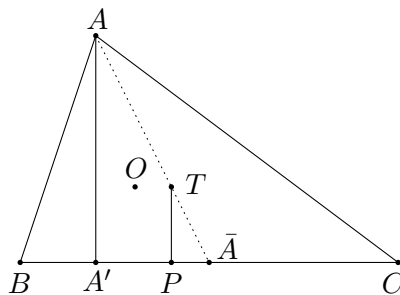
□

2. Dat je skup brojeva $\{2014, 2015, 2016\}$. Pod *operacijom* se podrazumijeva povećanje neka dva broja iz tog skupa za 3 ili smanjenje jednog od tih brojeva za 6. Da li je moguće da se nakon izvjesnog broja *operacija* dobije skup $\{2015, 2016, 2017\}$? Odgovor detaljno obrazložiti.

Rješenje: Povećanjem neka dva broja za 3 ili smanjenjem jednog od brojeva za 6 zbir brojeva skupa se poveća ili smanji za 6, pa će zbir brojeva svakog skupa dobijenog primjenom "operacije" dati isti ostatak pri dijeljenju sa 6. Kako zbrovi $2014 + 2015 + 2016 = 6045$ i $2015 + 2016 + 2017 = 6048$ daju različite ostatke pri dijeljenju sa 6, to se ne može dobiti skup $\{2015, 2016, 2017\}$. \square

3. U trouglu ABC su sve stranice različitih dužina i zbir dužina dvije stranice jednak je dvostrukoj dužini treće stranice. Dokazati da je prava koja prolazi kroz centar upisane kružnice i težište tog trougla paralelna stranici koja je srednja po dužini.

Rješenje: Označimo sa T težište trougla, a sa O centar upisane kružnice. Neka su a, b, c dužine stranica trougla i neka je a stranica koja je srednja po dužini. Iz uslova zadatka je $b + c = 2a$.



Neka je A' podnožje visine iz tjemena A , \bar{A} sredina stranice dužine a , i P podnožje normale iz težišta T na stranicu dužine a . Trouglovi $\triangle AA'\bar{A}$ i $\triangle TP\bar{A}$ su slični, pa slijedi da je

$$TP : AA' = T\bar{A} : A\bar{A} \Rightarrow TP = \frac{1}{3}h,$$

jer je $T\bar{A} : A\bar{A} = \frac{1}{3}$. S druge strane imamo:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h}{2} = r \cdot s,$$

gdje je s poluobim trougla, a r poluprečnik upisane kružnice. Kako je $s = \frac{3}{2}a$, to dobijamo

$$h = 3r.$$

Dakle, $TP = \frac{1}{3}h = r$, što daje da je prava određena tačkama T i O paralelna sa srednjom po dužini, stranicom trougla. \square

4. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokazati da važe nejednakosti

$$\frac{9}{4} \leq \frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} < 4.$$

Rješenje: Zanemarujući nenegativne članove a^4 , b^4 i c^4 i množeći odgovarajuće izraze sa $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ i $c^2 + 1$ respektivno, dobijamo sljedeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \\ & \leq \frac{1}{a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{c^4 - c^2 + 1} \\ & = \frac{a^2 + 1}{a^6 + 1} + \frac{b^2 + 1}{b^6 + 1} + \frac{c^2 + 1}{c^6 + 1} \\ & < a^2 + b^2 + c^2 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Alternativno, do gornjeg ograničenja možemo da dodjemo koristeći kvadratnu funkciju $f(t) = 2t^2 - t + 1, t \in [0, 1]$. Tjeme odgovarajuće parabole (grafika funkcije) je $(1/4, 7/8)$ tj. $f_{\min} = f(1/4) = 7/8$. Tada

$$\frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \leq \frac{3}{f(1/4)} = \frac{24}{7} < 4.$$

Donja ocjena se dobija direktnom primjenom nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine,

$$\frac{1}{2a^4 - a^2 + 1} + \frac{1}{2b^4 - b^2 + 1} + \frac{1}{2c^4 - c^2 + 1} \geq \frac{9}{2(a^4 + b^4 + c^4) + 2} \geq \frac{9}{4}.$$

U posljednjoj nejednakosti koristili smo činjenicu da je $a^4 + b^4 + c^4 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$. \square